دانشگاه صنعتی سهند
دانشکده علوم پایه

معادلات دیفرانسیل معمولی و مسائل ©

بخش ریاضی

جواد فرضی

ویرایش اول

مهر ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

۱ حل معادلات دیفرانسیل با Maple ۳

۱.۱ میدان شیب با DEplot ۳

۲.۱ دستور Dsolve ٦

فصل ۱

حل معادلات دیفرانسیل با Maple

در این بخش ابزارهای اساسی برای حل معادله دیفرانسیل با Maple را معرفی می‌کنیم. تنها معادله مرتبه اول را در نظر می‌گیریم.

ابتدا کتابخانه "DEtools" را بارگذاری کنید:

```
> with(DEtools):
```

بیایید یک معادله دیفرانسیل تعریف کنیم. برای مثال، معادله

$$y' = y(۴ - y)$$

را در نظرمی‌گیریم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. دستور زیر متغیری به نام "eq" تعریف می‌کند که معادله دیفرانسیل را در خود نگه‌می‌دارد:

```
> eq := diff(y(t),t) = y(t)*(4-y(t));
```

$$eq := \frac{\partial}{\partial t} y(t) = y(t)(۴ - y(t))$$

به چند نکته توجه کنید:

۱) مشتق y با دستور "diff" مشخص شده است.

۲) **نمی‌توانیم** "(t)" را از متغیر وابسته y حذف کنیم. در Maple عبارتهای "y" و "$y(t)$" با هم متفاوت است، معادله ما بر حسب "$y(t)$" است.

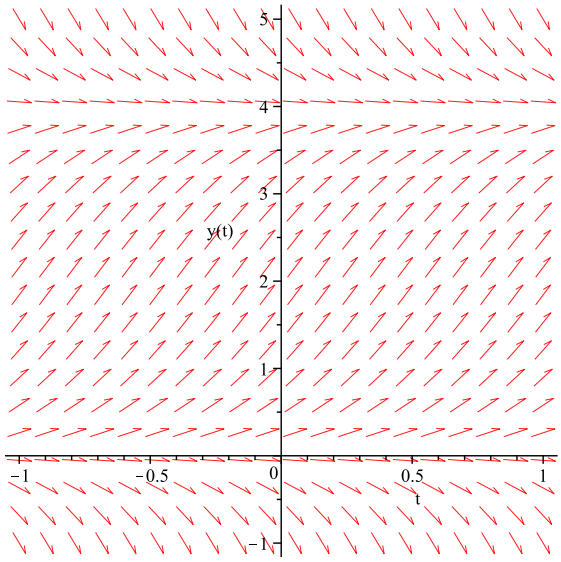
دو دستور مفید عبارتند از "DEplot" و "dsolve".

۱.۱ میدان شیب با DEplot

می‌خواهیم ی‌ک میدان شیب برای این معادله تولید کنیم. یک دستور Maple که این کار را انجام می‌دهد عبارتست از "DEplot". دستور Maple برای این کار عبارتست از

```
> DEplot(eq,y(t),t=-1..1,y=-1..5);
```

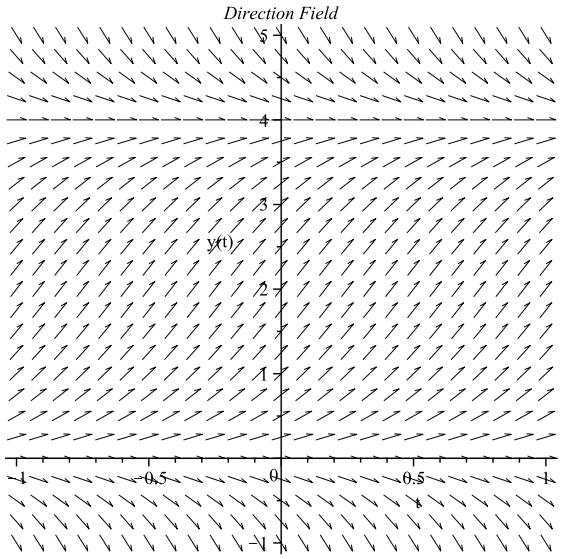
در این مثال، آرگومان اول معادله دیفرانسیل است، دومی تابع مجهول در معادله دیفرانسیل و سومی محدوده مقادیر متغیر مستقل برای رسم میدان شیب است و چهارمی محدوده مقادیر متغیر وابسته است (شکل ۱.۱).



شکل ۱.۱:

در اینجا همان مثال را با آرگومانهای بیشتر در نظر می‌گیریم. برای مثال، گزینه "dirgrid" به شما امکان می‌دهد تا در مورد تعداد بردارها تصمیم بگیرید و "color=blak" بردارها را سیاه می‌کند. شکل ۲.۱ را ببینید.

```
> DEplot(eq,y(t),t=-1..1,y=-1..5,title='Direction
  Field',color=black,dirgrid=[25,25]);
```



شکل ۲.۱:

توجه کنید یک نظراجمالی در میدان شیب کمک می‌کند تا رفتار جواب را پیش‌بینی کنیم. پیش از آنکه ادامه دهید، یک کپی از میدان شیب بالا بگیرید و جواب را به طوری که $y(0) = 1$ رسم کنید. دقت کنید که tهای منفی و همینطور مثبت را در نظربگیرید. همچنین جوابهای تعادل را هم رسم کنید.

چگونه یک میدان شیب را چاپ کنیم

۱) در منو انتخاب کنید:

```
Tools->Options->Plot Display->Windows
```

وقتی این گزینه را انتخاب کنید، شکلهای بعدی به جای صفحه کاری Maple در یک پنجره مجزا ظاهر خواهند شد. انتخاب دستور Inline شکلها را در حالت درون خطی Maple نشان می‌دهد.

۲) مکان نما را به دستور DEplot قبلی برده و enter را فشار دهید. این دستور را دوباره اجرا می‌کند، و اکنون آن در یک پنجره مجزا نمایش داده می‌شود.

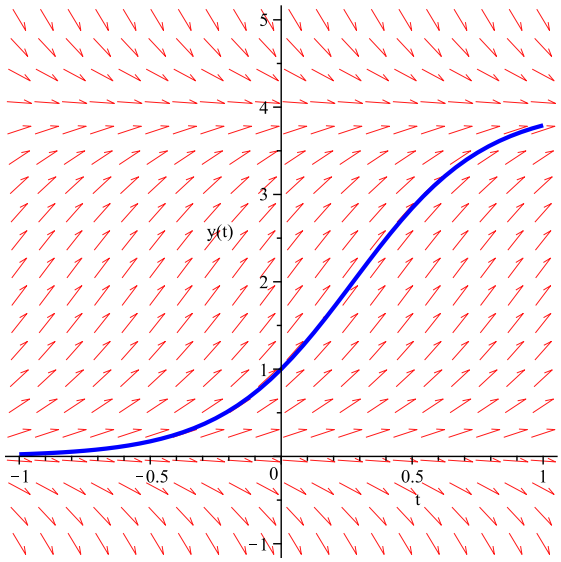
۳) روی آیکن print کلیک کنید یا در منو به

```
File->Print
```

بروید.

اجازه دهید یک منحنی انتگرال به این شکل اضافه کنیم. برای این کار، باید یک شرط اولیه مشخص کنیم. شرط $y(0) = 1$ را آزمایش می‌کنیم. برای مشخص کردن شرایط اولیه در DEplot، بلافاصله بعد از محدوده t آنها را در یک لیست قرار دهید که داخل یک جفت براکت قرار دارند. گزینه "lincolor=blue" دستوری است که منحنی انتگرال را به رنگ آبی می‌کشد (پیش فرض رنگ زرد است). شکل ۳.۱ را ببینید.

```
> DEplot(eq,y(t),t=-1..1,[[y(0)=1]],y=-1..5,linecolor=blue);
```



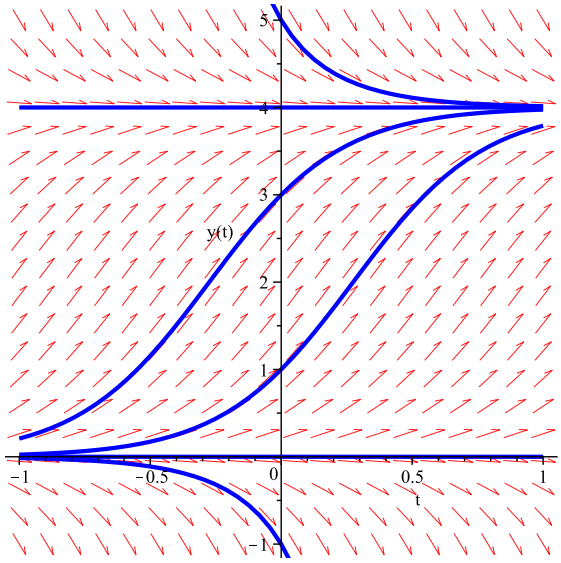
شکل ۳.۱:

توجه کنید که شرط اولیه باید داخل دوجفت براکت باید باشد. این برای آن است که می‌توان چندین شرط اولیه را با هم وارد کرد که هر کدام داخل دوبراکت قرار دارند. برای مثال داریم (شکل ۴.۱)

```
> DEplot(eq,y(t),t=-1..1,[[y(0)=-1],[y(0)=0],[y(0)=1],[y(0)=3],[y(0)
  =4],[y(0)=5]],y=-1..5,linecolor=blue);
```

ملاحظه کنید چگونه پیکانهایی که در میدان شیب رسم شده‌اند بر منحنی‌های جواب مماس هستند.

نکته مهم: منحنی‌های جواب که بادستور DEplot رسم شده‌اند به صورت عددی با روش اویلر محاسبه می‌شوند. آنها به طور کلی، تقریبهای خوبی هستند، اما دقیق نیستند، بعضی وقتها ممکن است آنها تقریبهای بسیار بدی باشند.



شکل ۱.۴:

۲.۱ دستور Dsolve

دستور "dsolve" می‌تواند بعضی از معادلات دیفرانسیل را به صورت تحلیلی حل کند. اجازه دهید با یک مثال ساده آغاز کنیم:

$$y' = -y.$$

این معادله را با دست حل کنید. آن هم خطی است و هم جداشدنی.

ابتدا، معادله را تعریف می‌کنیم و آن را در متغیر Maple به نام "eq2" ذخیره می‌کنیم:

```
> eq2 := diff(y(t),t) = -y(t);
```

$$eq۲ := \frac{d}{dt}y(t) = -y(t)$$

حال از "dsolve" برای پیدا کردن جواب عمومی استفاده می‌کنیم. اولین آرگومان "dsolve" معادله است، دومی تابعی است که نسبت به آن معادله حل می‌شود:

```
> dsolve(eq2,y(t));
```

$$y(t) = \_C۱\, e^{-t}$$

توجه کنید Maple ثابت دلخواه را با $\_C۱$ نمایش می‌دهد. این یک قراداد در Maple است، وقتی ثابتی را ایجاد می‌کند یک زیرخط در ابتدای آن قرار می‌دهد.

همچنین می‌توانیم از "dsolve" برای حل مساله مقدار اولیه نیز استفاده کنیم. برای مثال، فرض کنیم شرط اولیه عبارت باشد از $y(۰) = ۲$. این شرط را در دستور با افزودن شرط اولیه بر معادله با «کروشه» مشخص می‌کنیم:

```
> dsolve({eq2,y(0)=2},y(t));
```

$$y(t) = ۲\, e^{-t}$$

به مثال با دقت توجه کنید. اولین آرگومان dsolve عبارتست از {eq2,y(0)=2}.در Maple، کروشه برای ایجاد لیست استفاده می‌شود. در این حالت، لیستی از معادله و شرط اولیه ایجاد کرده‌ایم و آن را به عنوان اولین آرگومان به dsolve داده‌ایم. آرگومان دوم، $y(t)$، اسم تابع است.
چگونه این جواب را رسم کنیم؟ متاسفانه، جواب به صورتی نیست که بتوان شکل آن را با دستور "plot" به راحتی رسم کرد. دستور plot عبارتها را رسم می‌کند، جواب بالا به صورت یک معادله است (یک علامت تساوی در بین است). عبارتی که ما می‌خواهیم، 2*exp(-t) است که طرف راست معادله است. خوشبختانه، دستوری در Maple وجود دراد که به ما اجازه می‌دهد طرف راست را از معادله برداریم. این تابع "rhs" است.
بنابراین در اینجا راهی برای رسم جواب بالا وجود دارد. ابتدا، جواب را در یک متغیر، مانند "sol2"، ذخیره کنید (چون آن eq2 را حل می‌کند):

```
> sol2 := dsolve({eq2,y(0)=2},y(t));
```

$$sol۲ := y(t) = ۲\, e^{-t}$$

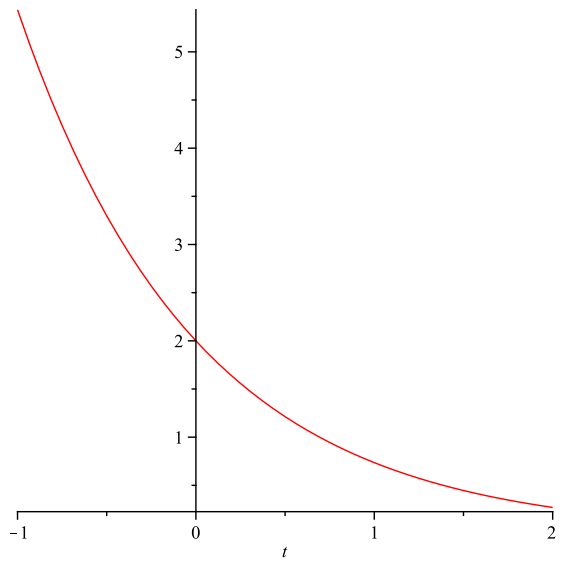
اکنون طرف راست را برداشته و در متغیر جدیدی که rhsSol2 نام دارد ذخیره کنید:

```
> rhsSol2 := rhs(sol2);
```

$$rhsSol۲ := ۲\, e^{-t}$$

حال آن را رسم کنید (شکل ۵.۱):

```
> plot(rhsSol2,t=-1..2);
```

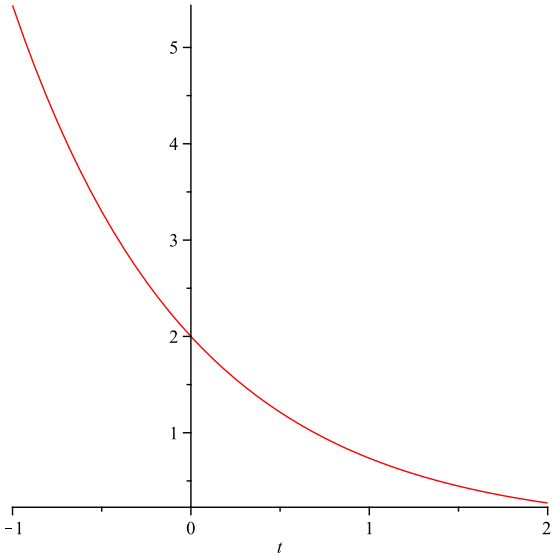


شکل ۵.۱:

شما می‌توانید چند گام بالا را ترکیب کنید (شکل ۶.۱):

```
> sol2 := rhs(dsolve({eq2,y(0)=2},y(t)));
```

$$sol۲ := ۲\, e^{-t}$$



شکل ۱.۶:

```
> plot(sol2,t=-1..2);
```

اجازه دهید مثال دیگری را آزمایش کنیم. به خاطر داشته باشید که "eq" هنوز تعریف شده است:

```
> eq;
```

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t)(۴ - y(t))$$

این معادله جداشدنی است و با دست می‌توان حل کرد. انتگرال y با کسرهای جزئی انجام می‌شود.
اجازه بدهید این را به "dsolve" بدهیم:

```
> sol1 := rhs(dsolve(eq,y(t)));
```

$$sol۱ := ۴\left(۱ + ۴\,e^{-۴\,t}\_C۱\right)^{-۱}$$

این احتمالاً مشابه جوابی است که شما با دست حل کرده و بدست آورده‌اید. با این حال، توجه کنید که خروجی Maple نشان نمی‌دهد که جواب تعادل $y(t) = ۰$ نیز می‌تواند یک جواب باشد.
شرط اولیه $y(۰) = ۱$ را آزمایش می‌کنیم:

```
> sol1a := rhs(dsolve({eq,y(0)=1},y(t)));
```

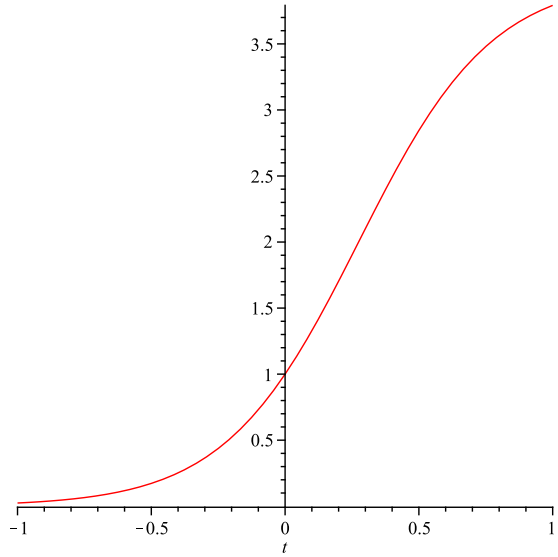
$$sol۱a := ۴\left(۱ + ۳\,e^{-۴\,t}\right)^{-۱}$$

```
> plot(sol1a,t=-1..1);
```

آن شبیه به همان است که از میدان شیب انتظار داشتیم.
اجازه دهید شرط اولیه $y(۰) = ۰$ را آزمایش کنیم تا مطمئن شویم که Maple جواب درست را به ما خواهد داد.

```
> sol1b := rhs(dsolve({eq,y(0)=0},y(t)));
```

$$sol۱b := ۰$$



شکل ۷.۱:

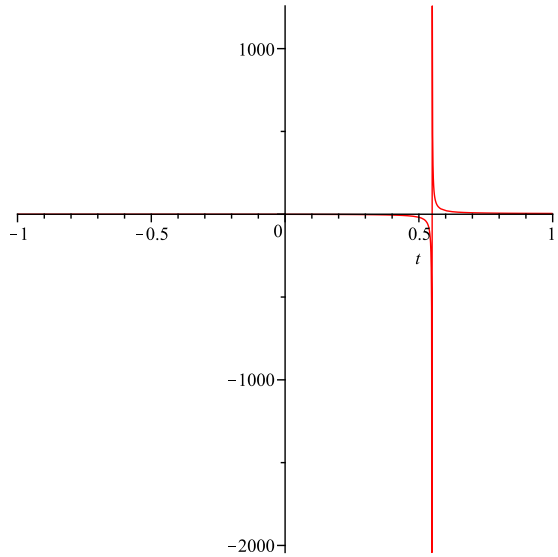
بله، آن درست کار می‌کند.

اجازه دهید شرط اولیه $y(0) = -\frac{1}{2}$ را آزمایش کنیم (شکل ۸.۱):

```
> sol1c := rhs(dsolve({eq,y(0)=-1/2},y(t)));
```

$$sol1c := -4\left(-1 + 9\,e^{-4\,t}\right)^{-1}$$

```
> plot(sol1c,t=-1..1);
```

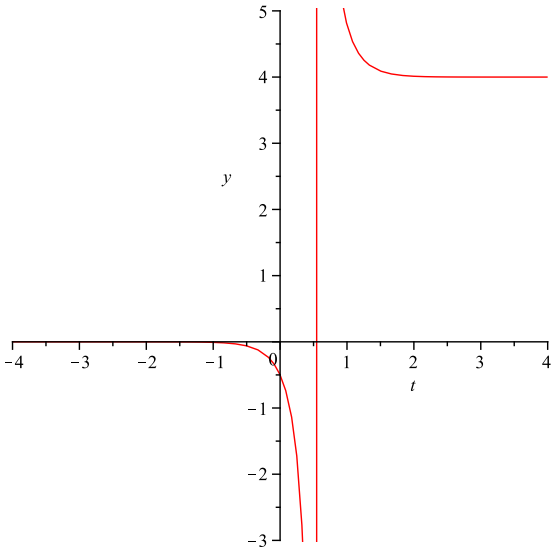


شکل ۸.۱:

چه اتفاقی افتاد؟

اجازه دهید دستور plot را تغییر دهیم تا محدوده عمودی کوچکتری را مشاهده کنیم (شکل ۹.۱).

```
> plot(sol1c,t=-4..4,y=-3..5);
```



شکل ۹.۱:

به نظر می‌رسد که جواب یک مجانب عمودی دارد. اگر به جواب دقت کنید آن را پیدا می‌کنید. در واقع، با صفر قرار دادن مخرج آن را بدست می‌آوریم. در پایین، از دستور "denom" استفاده می‌کنیم تا مخرج را بدست آوریم و سپس ریشه آن را با کمک "solve" پیدا کنیم.

```
> den := denom(sol1c);
```

$$den := -۱ + ۹\, e^{-۴\, t}$$

```
> r := solve(den=0,t);
```

$$r := \frac{۱}{۲} \ln(۳)$$

```
> evalf(r);
```

.۵۴۹۳۰۶۱۴۴۲

آیا Maple هر معادله دیفرانسیل مرتبه اولی را می‌تواند حل کند؟ متاسفانه، خیر. در اینجه یک مثال وجود دارد:

```
> eq3 := diff(y(t),t) = sin(y(t))+cos(t);
```

$$eq۳ := \frac{d}{dt} y(t) = \sin(y(t)) + \cos(t)$$

```
> dsolve(eq3,y(t));
```

تابع چیزی را برنمی‌گرداند؛ Maple نمی‌تواند این معادله را حل کند.